

Twierdzenie Kreina-Šmuliana

Według W. Rudina

Niech X będzie przestrzenią Banacha. Oznaczmy przez B domkniętą kulę jednostkową w X , a przez B^* domkniętą kulę jednostkową w X^* . Niech E będzie wypukłym podzbiorem X^* takim, że dla dowolnego $r > 0$ zbiór $E \cap (rB^*)$ jest słabo* zwarty. Wówczas E jest słabo* domknięty.

Dowód: 1. E JEST NORMOWO DOMKNIĘTY

Niech $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w E . Ponieważ ciągi Cauchy'ego są zbiorami ograniczonymi, wszystkie jego wyrazy należą do zbioru $E \cap (rB^*)$ dla pewnego $r > 0$. Zbiór ten jest słabo* zwarty, a więc słabo* domknięty, a co za tym idzie normowo domknięty. Stąd

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \in E \cap (rB^*) \subset E$$

czyli E jest normowo domknięty.

2. TWIERDZENIE KREINA-ŠMULIANA WYNIKA Z NASTĘPUJĄCEGO STWIERDZENIA:

Niech $\tilde{E} \subset X^*$ spełnia założenia twierdzenia Kreina-Šmuliana. Jeśli $\tilde{E} \cap B^* = \emptyset$, to istnieje $x \in X$ taki, że $\operatorname{Re} \langle x, \psi \rangle \geq 1$ dla wszystkich $\psi \in \tilde{E}$.

Istotnie: Ponieważ E jest normowo domknięty, dla każdego $\psi \notin E$ istnieje $r > 0$ takie, że

$$\overline{B(\psi, r)} \cap E = \emptyset.$$

Niech $\tilde{E} = r^{-1}(E - \psi)$. Zbiór $\tilde{E}$ spełnia założenia twierdzenia Kreina-Šmuliana, a ponadto

$$\begin{aligned} \tilde{E} \cap B^* &= \{r^{-1}(\varphi + \psi) : \varphi \in E, \|r^{-1}(\varphi + \psi)\| \leq 1\} \\ &= \{r^{-1}(\varphi + \psi) : \varphi \in E, \|\varphi + \psi\| \leq r\} = \emptyset. \end{aligned}$$

Wiemy zatem, że istnieje $x \in X$ taki, że

$$\operatorname{Re} \langle x, \psi \rangle \geq 1$$

dla wszystkich $\psi \in \tilde{E}$. Innymi słowy $\tilde{E} \subset \tilde{H}$ gdzie $\tilde{H}$ jest słabo* domkniętą półprzestrzenią:

$$\tilde{H} = \{\psi \in X^* : \operatorname{Re} \langle x, \psi \rangle \geq 1\}$$

(słabo* domkniętość $\tilde{H}$ wynika z oczywistego faktu, że $\psi \mapsto \operatorname{Re} \langle x, \psi \rangle$ jest słabo* ciągłym funkcjonałem rzeczywistym na X^*). Zauważmy, że $0 \notin \tilde{H}$. Oznaczmy $H = \psi + r\tilde{H}$. Wówczas

$$E = \psi + r\tilde{E} \subset \psi + r\tilde{H} = H$$

i $\psi \notin H$. Tym samym wykazaliśmy, że dla każdego $\psi \notin E$ istnieje słabo* domknięta półprzestrzeń H_ψ taka, że

$$E \subset H_\psi \not\ni \psi.$$

Stąd

$$E = \bigcap_{\psi \notin E} H_\psi$$

jest zbiorem słabo* domkniętym.

3. FAKT

$$\bigcap_{\substack{F \subset r^{-1}B \\ |F| < \infty}} F^\circ = rB^*,$$

gdzie $F^\circ = \{\psi \in X^* : |\langle x, \psi \rangle| \leq 1 \text{ dla wszystkich } x \in F\}$.

Istotnie: Niech $F = \{x_1, \dots, x_n\} \subset r^{-1}B$ i niech $\psi \in rB^*$. wówczas oczywiście $|\langle x_k, \psi \rangle| \leq \|x_k\| \|\psi\| \leq 1$ dla $k = 1, 2, \dots, n$. Stąd

$$rB^* \subset \bigcap_{\substack{F \subset r^{-1}B \\ |F| < \infty}} F^\circ.$$

Z drugiej strony jeśli $\psi \in X^*$ i $\psi \notin rB^*$ (tzn. $\|\psi\| > r$), to istnieje $x \in X$ taki, że $\|x\| = 1$ i $|\langle x, \psi \rangle| = r' > r$. Wówczas $y = r^{-1}x \in r^{-1}B$ i $|\langle y, \psi \rangle| = \frac{r'}{r} > 1$. Innymi słowy $\psi \notin F^\circ$ dla $F = \{y\} \subset r^{-1}B$.

4. DOWÓD STWIERDZENIA Z PUNKTU 2.

Skonstruujemy indukcyjnie ciąg $\{F_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ skończonych podzbiorów X taki, że spełnione są warunki:

$$\begin{aligned} I_n &: nF_n \subset B, \\ II_n &: F_0^\circ \cap \dots \cap F_n^\circ \cap \tilde{E} \cap ((n+1)B^*) = \emptyset. \end{aligned}$$

Kładziemy $F_0 = \{0\}$. I_0 jest spełniony w sposób oczywisty, a II_0 wynika z założenia o $\tilde{E}$ i tego, że $\{0\}^\circ = X^*$.

Przypuśćmy, że mamy już $F_0, \dots, F_{k-1}$. Niech

$$Q = F_0^\circ \cap \dots \cap F_{k-1}^\circ \cap \tilde{E} \cap ((k+1)B^*).$$

Jeśli dla każdego skończonego podzbioru $F \subset k^{-1}B$ mielibyśmy $F^\circ \cap Q \neq \emptyset$, to

$$Q \cap (kB^*) \neq \emptyset.$$

Wynika to stąd, że Q jako przecięcie słabo* domkniętych zbiorów F_i° ($i = 1, 2, \dots, k-1$) i słabo* zwartego zbioru $\tilde{E} \cap ((k+1)B^*)$ jest słabo* zwarty, a na mocy faktu 3.

$$Q \cap (kB^*) = Q \cap \bigcap_{\substack{F \subset k^{-1}B \\ |F| < \infty}} F^\circ = \bigcap_{\substack{F \subset k^{-1}B \\ |F| < \infty}} Q \cap F^\circ.$$

Zbiory po prawej stronie powyższej równości tworzą scentrowaną rodzinę domkniętych podzbiorów zwanego zbioru Q , a zatem mają niepuste przecięcie (przecięcie skończonej liczby tych zbiorów jest znów zbiorem tej postaci). Zauważmy jednak, że $Q \cap (kB^*) \neq \emptyset$ stoi w sprzeczności z warunkiem II_{k-1} . Oznacza to, że istnieje skończony podzbiór $F_k \subset k^{-1}B$ taki, że $F_k^\circ \cap Q = \emptyset$ lub innymi słowy taki, że spełnione są warunki I_k i II_k .

Możemy zatem kontynuować konstrukcję i otrzymamy ciąg $F_1, F_2, \dots$ skończonych podzbiorów X taki, że

$$\tilde{E} \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k^\circ = \emptyset$$

(to wynika z II_n dla wszystkich n).

Ustawmy elementy $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ w ciąg $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Wówczas $\|x_n\| \rightarrow 0$ (bo $F_n \subset n^{-1}B$). Niech

$$T: X^* \ni \psi \longmapsto \{\langle x_n, \psi \rangle\}_{n \in \mathbb{N}} \in c_0.$$

Jest jasne, że $T \in B(X^*, c_0)$. Ponadto $T(\tilde{E})$ jest wypukłym podzbiorem c_0 .

Ponieważ $\tilde{E} \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k^\circ = \emptyset$ mamy

$$\|T\psi\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle x_n, \psi \rangle| \geq 1$$

dla wszystkich $\psi \in \tilde{E}$. Niech $P = \overline{T(\tilde{E})}$. Jest jasne, że $\|y\| \geq 1$ dla wszystkich $y \in P$. Stąd oczywiście $P \cap \{0\} = \emptyset$. Mamy więc dwa rozłączne zbiory wypukłe P i $\{0\}$ w c_0 przy czym jeden z nich jest domknięty, a drugi zwarty. Istnieje zatem $\Psi \in (c_0)^* = l^1$ i $\varrho \in \mathbb{R}$ taki, że

$$0 = \operatorname{Re} \Psi(0) < \varrho < \operatorname{Re} \Psi(y)$$

dla wszystkich $y \in P$. Możemy oczywiście wziąć $\varrho^{-1}\Psi$ zamiast Ψ aby otrzymać

$$1 < \operatorname{Re} \Psi(y)$$

dla wszystkich $y \in P$. Mamy $(c_0)^* = l^1$, więc istnieje ciąg liczb $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$ oraz

$$\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, \psi \rangle \geq 1$$

dla wszystkich $\psi \in \tilde{E}$. Teraz wystarczy położyć

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \in X.$$

Q.E.D.

W dowodzie korzystamy z następującego twierdzenia:

Twierdzenie o oddzielaniu

(okrojona wersja Twierdzenia 3.4 z książki “Analiza Funkcjonalna”)

Niech A i B będą niepustymi, wypukłymi i rozłącznymi podzbiorami przestrzeni Banacha X . Niech A będzie zwarty, a B domknięty. Wówczas istnieje $\Psi \in X^$ oraz $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}$ takie, że*

$$\operatorname{Re} \Psi(x) < \varrho_1 < \varrho_2 < \operatorname{Re} \Psi(y)$$

dla wszystkich $x \in A$ i $y \in B$.